# Développement : Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$

ANALYSE & PROBABILITÉS
ALGÈBRE & GÉOMÉTRIE

Références :
- [QUE] QUEFFÉLEC H., ZUILY C., *Analyse pour l'agrégation, 4ème **édition***, Dunod, 2013, p205.
- [BMP] BECK V., MALICK J., PEYRÉ G., *Objectif Agrégation, 2ème **édition***, H&K, 2005, p97.

Pour les leçons :
- 157 : Matrices symétriques, matrices hermitiennes.
- 158 : Endomomorphismes remarquables d'un espace euclidien (de dimension finie).
- 159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie.
- 161 : Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : distances, isométries.
- 181 : Convexité dans $\mathbb{R}^n$. Applications en algèbre et en géométrie.
- 208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples et applications.

**Attention :** Je fais un peu différemment des références, le développement suit une trame similaire mais la preuve est adaptée pour être plus simple (selon moi). Donc c'est normal s'il y a des parties qui ne correspondent pas vraiment aux livres par moments (ou des modifications).

Si $A$ est une partie d'un espace affine (par exemple vectoriel), $\text{Conv}(A)$ désigne son enveloppe convexe.

**Lemme 1.**

Soient $H$ un $\mathbb{R}$-espace de HILBERT et $C$ une partie convexe non vide fermée de $H$. Alors, pour tout $x \in H \backslash C$, il existe $f \in H^*$ continue telle que $f(x) > \sup_{y \in C} f(y)$.

PREUVE : Soit $x \in H \backslash C$. On note $a = p_C(x)$ la projection de $x$ sur $C$. On pose $f = \langle a - x | \cdot \rangle$, qui est linéaire.
Comme $x \notin C$, $x \neq a$. Donc $f(a-x) = \|a-x\|^2 > 0$. Ainsi, $f(a) > f(x)$.
Soit $y \in C$. Par la caractérisation de la projection sur un convexe fermé, on a :

$$\langle x - a | y - a \rangle \leqslant 0.$$

Donc $f(a) \leqslant f(y)$.
On a montré que :

$$\forall y \in C \quad f(x) < f(a) \leqslant f(y).$$

On pose $g = -f$, qui est encore une forme linéaire continue sur $H$. On a :

$$\forall y \in C \quad g(y) \leqslant g(a) < g(x).$$

En passant au sup sur $C$, on a le résultat. □

**Lemme 2.**

Soient $H$ un $\mathbb{R}$-espace de HILBERT et $A$ une partie non vide de $H$. Alors :

$$x \in \overline{\text{Conv}(A)} \Longleftrightarrow \forall f \in H^* \quad f(x) \leqslant \sup_{y \in \overline{\text{Conv}(A)}} f(y).$$

PREUVE : La contraposée du lemme précédent (avec $C = \overline{\text{Conv}(A)}$, qui est fermé et convexe) donne que, pour tout $x \in H$ :

$$\left( \forall f \in H^* \quad f(x) \leqslant \sup_{y \in \overline{\text{Conv}(A)}} f(y) \right) \Longrightarrow x \in \overline{\text{Conv}(A)},$$

et, par définition du sup, si $x \in \overline{\text{Conv}(A)}$ et $f \in H^*$, on a directement que $f(x) \leqslant \sup_{y \in \overline{\text{Conv}(A)}} f(y)$. □

**Théorème 3.** ***Enveloppe convexe de*** $O_n(\mathbb{R})$**.**

Soient $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ et $|||\cdot|||$ sa norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité pour $|||\cdot|||$, qu'on note $B$.

<u>Preuve :</u> $O_n(\mathbb{R})$ étant un compact, d'après le théorème de Carathéodory, $\mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R}))$ est un compact. Donc :

$$\overline{\mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R}))} = \mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R})).$$

⋆ <u>Étape 1 :</u> Trouvons tous les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$.
Soit $f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$. D'après le théorème de représentation de Riesz, puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire $(A,B) \longmapsto \langle A|B\rangle = \mathrm{Tr}(A\,{}^tB)$, est un espace euclidien, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(X) = \mathrm{Tr}(X\,{}^tM)$.
⋆ <u>Étape 2 :</u> Montrons que $B \subset \mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R}))$. D'après ce qui précède et le lemme 2, cela revient à montrer que pour tout $X \in B$, $\mathrm{Tr}(X\,{}^tM) \leqslant \sup\limits_{U \in O_n(\mathbb{R})} \mathrm{Tr}(U\,{}^tM)$.
Grâce au théorème de décomposition polaire, on écrit ${}^tM = U_0S$ avec $U_0 \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de $S$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de $S$.
D'une part,

$$\begin{aligned}
\sup_{U \in \mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R}))} \mathrm{Tr}(U\,{}^tM) &\geqslant \sup_{U \in O_n(\mathbb{R})} \mathrm{Tr}(U\,{}^tM)\\
&\geqslant \mathrm{Tr}(U_0^{-1}\,{}^tM)\\
&\geqslant \mathrm{Tr}(S)\\
&\geqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i\\
&\geqslant \sum_{i=1}^n \|Se_i\|_2.
\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $X \in B \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, comme $X^* = {}^tX$ :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(X\,{}^tM) &= \sum_{i=1}^n \langle X\,{}^tMe_i|e_i\rangle\\
&= \sum_{i=1}^n \langle {}^tMe_i|\,{}^tXe_i\rangle\\
&\leqslant \sum_{i=1}^n \|{}^tMe_i\|_2\|{}^tXe_i\|_2 && \text{(par l'inégalité de Cauchy-Schwarz)}\\
&\leqslant \sum_{i=1}^n \|{}^tMe_i\|_2 |||{}^tX||| \|e_i\|_2\\
&\leqslant \sum_{i=1}^n \|{}^tMe_i\|_2 && \text{(car } |||{}^tX||| = |||X||| \leqslant 1 \text{ et } \|e_i\|_2 = 1)\\
&\leqslant \sum_{i=1}^n \|U_0Se_i\|_2\\
&\leqslant \sum_{i=1}^n \|Se_i\|_2 && \text{(car } U_0 \text{ est orthogonale)}\\
&\leqslant \sup_{U \in \mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R}))} \mathrm{Tr}(U\,{}^tM),
\end{aligned}$$

par le travail qui précède.
Par conséquent, $\mathrm{Tr}(X\,{}^tM) \leqslant \sup\limits_{U \in \overline{\mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R}))}} \mathrm{Tr}(U\,{}^tM)$. D'après le lemme 2, $X \in \overline{\mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R}))} = \mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R}))$.
D'où l'inclusion souhaitée.
⋆ <u>Étape 3 :</u> Montrons l'inclusion réciproque.
Soit $X \in O_n(\mathbb{R})$. Alors, pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\|Xx\|_2 \leqslant \|x\|_2$ (on a en fait égalité), donc $|||X||| \leqslant 1$, ce qui prouve que $X \in B$. Donc $O_n(\mathbb{R}) \subset B$. Ainsi, le convexe $B$ contient $O_n(\mathbb{R})$, donc il contient le plus petit convexe contenant $O_n(\mathbb{R})$, qui est $\mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R}))$.
Cela achève la preuve. □